

1 压气机流致噪声源

1.1 基本气动噪声源理论

在气动声学中，主要有三个阶次的噪声源，即单极子、偶极子、四极子。

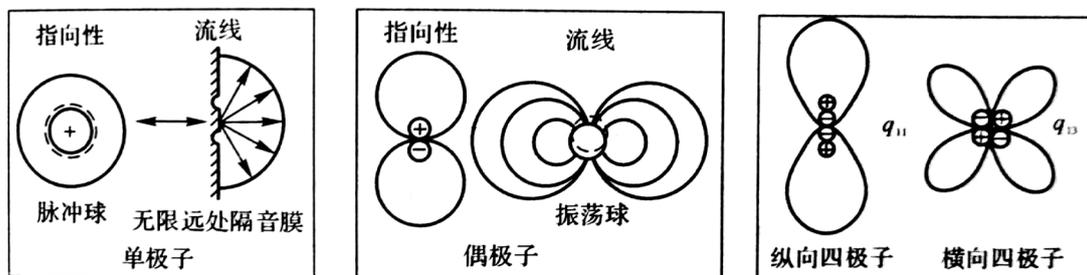


图 1 基本声源特征比较

单极子可认为是一个脉动的点源，其声场的振幅和相位在球表面上的每个点都是相同的。

偶极子可以看作是相互十分接近而相位相差 180 度的两个单极子，如果沿着整个球型边界进行积分，则流体的静流量总是显示为零，因为流入的流量等于流出的流量。但是因为流入和流出方向一致，存在一个静动量。根据牛顿定律，一定可以找到一个与偶极子相关的力。因此，其另一种描述是一个振荡作用驱动的球。

四极子可以看作是二个具有相反相位的偶极子形成，因而也就是由四个单极子所组成。因为偶极子有一个轴，所以偶极子的组合可以是横向的，也可以是纵向的。横向四极子代表剪切应力，而纵向四极子则表示纵向应力。

任何实际声源都可以看作是由适当的相位（或时间滞后）和幅值的诸单极子的一个分布系统所组成。正常情况下，不可能把这样的问题公式化。考虑一个机械噪声问题，通常可以判定哪种形式的声源占主导地位，并根据这种判顶预测声源的某些特征。例如，在多级叶轮机械系统中，噪声源十分复杂，在现有条件下肯定不可能完全预测。我们需要根据需要分析在特定的流动工况下所主导的流动，或是单独提取研究感兴趣的部分的声源特征进行研究。

1.2 叶轮机流致噪声源

航空发动机叶轮机包括风扇、压气机和涡轮，它们均是由在圆形管道中相互靠近的转子和静子叶片排构成的流体机械，气流在旋转的转子和静子叶片排内流动，产生了强烈的单音噪声和宽频噪声。

根据气动声学的基本理论，可以对叶轮机内部气动噪声源进行归类总结，将其分为单极子噪声源、偶极子噪声源、四极子噪声源和激波噪声等，如图 14 所示。

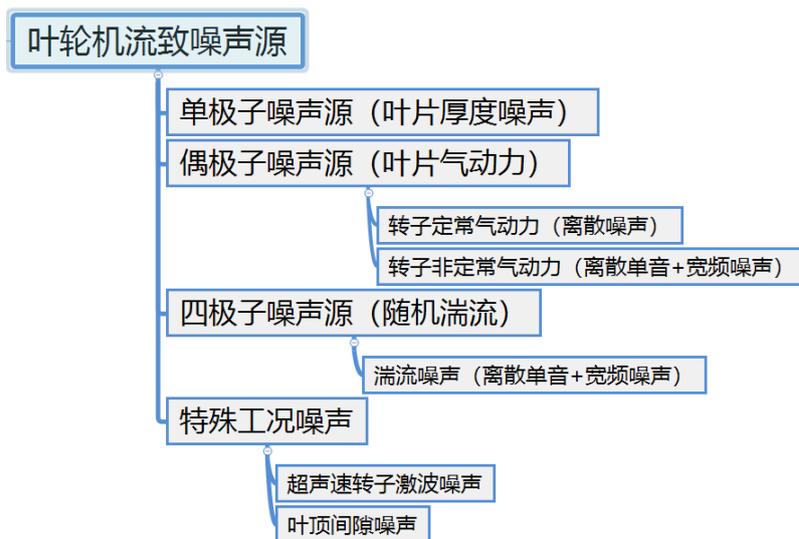


图 2 叶轮机气动噪声源分类

单极子噪声源（叶片厚度噪声）不是叶轮机的主要噪声源，其噪声辐射量级不大，一般可以不予考虑。根据气动声学基本方程，Lighthill 应力张量的体积积分，形成了四极子的流动噪声源。Ffowcs Williams 和 Hawkings 对流体声源的量纲分析表明，偶极子的脉动力辐射噪声的声强度与流体速度的 6 次方成比例。而四极子的脉动应力辐射噪声的声强度与流体速度的 8 次方成比例。实验表明，低速下叶轮机随机噪声与流动速度 6 次方成正比。因此，在工程应用中，较为快速的预测方法是通过 CFD 仿真计算转子表面定常气动力，再等效为旋转的偶极子声源，最终求解在 BPF 以及各个 Harmonic 位置的声学响应方程。

在高速叶轮机中（叶片的叶尖马赫数大于 0.8），由于四极子脉动应力产生的离散单音噪声也占到很大的比重，其产生的根源是进气畸变流场与旋转叶片势流场干涉。对于该部分贡献的噪声，则需要提取非定常流场结果，利用声类比方法转化为气动噪声源。

偶极子噪声源由可进一步分为定常叶片噪声源和非定常叶片噪声源。从流体的本质看，叶片表面的非定常力又可以分成周期的和随机的，因此产生了叶轮机的宽频噪声和离散单音噪声。

1.3 非定常叶片气动力噪声

在空间均匀稳定流场工作条件下，风扇（压气机、涡轮）叶片承受着稳态（定常）的气动作用力。而在多级叶轮机中，由于叶轮机叶排之间的相互干涉，在转子叶片和静子叶片中都会产生非定常力噪声源。在本压气机实验台研究中，在 IGV 导叶、转子和静子之间存在 5 中非定常干涉机制：

- (1) IGV 导叶势流场与转子干涉在转子叶片产生非稳态力。
- (2) 转子叶片势流场与静叶干涉在静叶产生非稳态力。
- (3) IGV 导叶势流场与转子干涉而在转子叶片后缘诱导的脱落涡与静叶干涉在静叶产生的非稳态力。
- (4) 静子切割转子叶片尾迹在静叶产生非稳态力。
- (5) 转子叶片切割 IGV 导叶尾迹在转子叶片产生的非稳态力。

其中(3)为(1)干涉的二次影响,在简化计算时往往可以忽略。转静干涉在叶片上产生周期性的非稳态气动力是风扇/压气机离散噪声产生的主要原因。干涉机制示意图如图15所示。

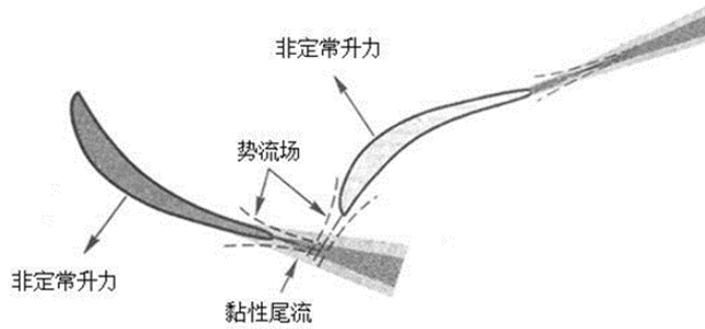


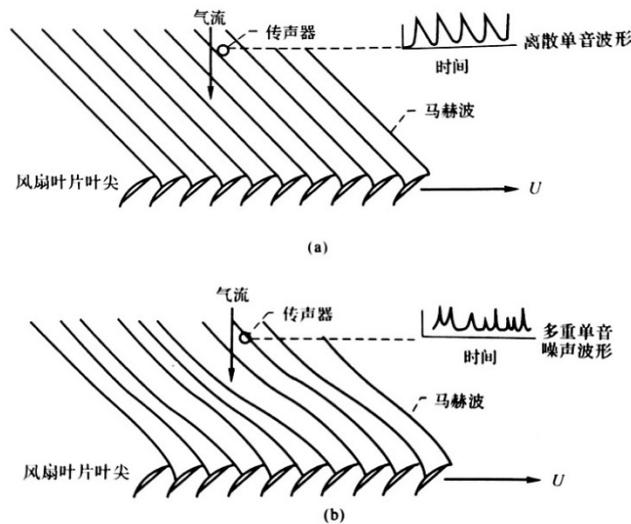
图 3 转静干涉机制

1.4 超声速转子激波噪声

对于超声速转子,定常叶片气动力以激波形式出现,会产生一种噪声谱特征为“多重单音”的强烈噪声,其实质是由于超声速转子叶片前缘激波引起的激波噪声。

图 16 给出了这种噪声产生的物理机制。对于理想的叶片二维叶栅,假定各个叶片完全相同,叶片等距相等,来流叶完全均匀,当超声速转子旋转时,在每个叶片前缘产生一道前伸激波,外伸激着来流马赫数的方向向前传播形成声压场。但对于实际的压气机,由于动叶叶片之间加工存在差异,以及受到来流的随机脉动,引起各个叶片前缘外伸激波强度和方向的差异,因此在传播过程中出现激波的追赶、相交和归并现象。进一步分析发现,上述的声压在转子每一次转动时都会重复出现,因此这种噪声是以轴通过频率为间隔的调制特征形式出现,通常称为多重单音噪声或蜂鸣噪声 (buzz noise)。

如图 17 为跨音速时,四个截面机匣壁面静压脉动量频谱分析的结果。A/B 截面(导叶前/动叶前)存在激波引起的轴频及倍频成分, C/D 截面(静叶前/静叶后)和外声场则不明显。这与上述的分析完全一致,这也是转子激波噪声所独有的现象。



(a) 理想声波模式; (b) 实际声波模式

图 4 多重单音噪声产生机理

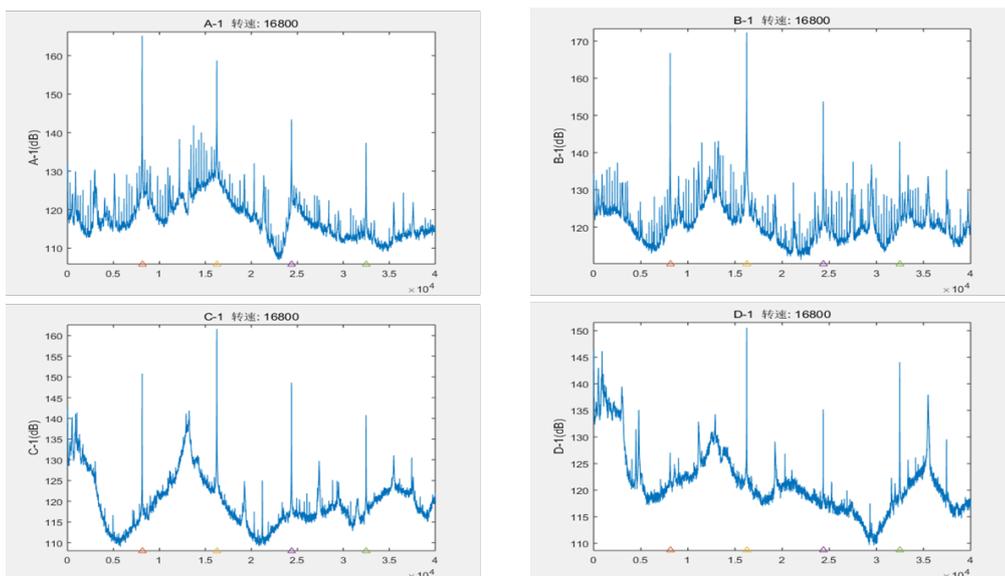


图 5 跨音速不同截面机匣壁面静压频谱图

1.5 叶顶间隙噪声

对于三维叶片，由于沿叶片径向气流的变换，还存在叶尖间隙气流脉动等三维非定常流动。在叶顶压力面和吸力面压差作用下，一部分流体越过叶顶间隙会形成叶顶泄漏流。在与主流的相互作用下，这种泄漏流通常以叶顶泄漏涡的形式在叶顶出现，如图 18 所示。

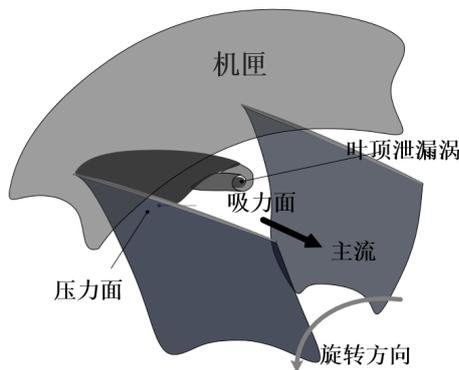


图 6 压气机叶顶泄漏流轮廓图

许多研究已经证实了叶顶间隙区域存在非定常波动，是由于不稳定流动所致。Mailach 等在某低速轴流压气机中发现动叶顶部泄漏涡在近失速工况和大叶顶间隙条件下会和相邻叶片发生周期性碰撞，导致叶顶出现非定常波动，形成旋转不稳定现象，如图 19。他们认为这种现象是局部现象，只出现在叶顶区域，是顶部间隙噪声和叶片振动的根源。其特征频谱除通过频率和其倍频外，还出现接近 1/2 BPF 的多尖峰宽频，如图 20 所示。本压气机试验台在低速小流量工况同样出现了类似的频谱，会存在接近动叶频率一半的多尖峰宽频，但无法通过导叶-动叶-静叶的和差倍频关系解释，如图 21 所示。

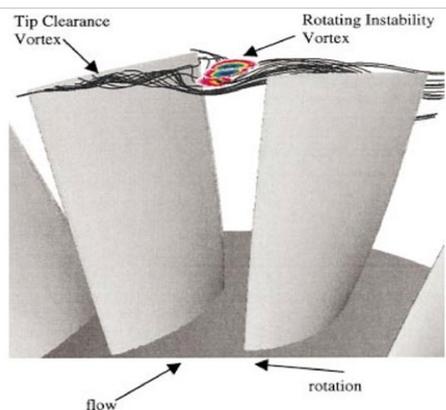


图 7 旋转不稳定流动示意

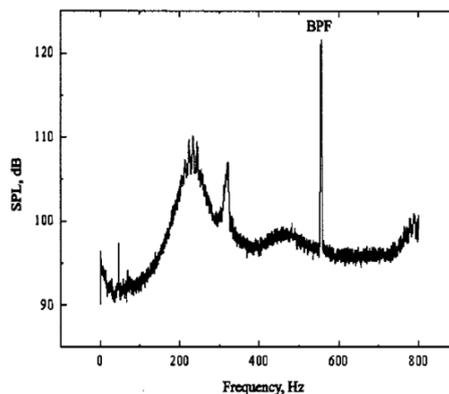


图 8 旋转不稳定特征频谱

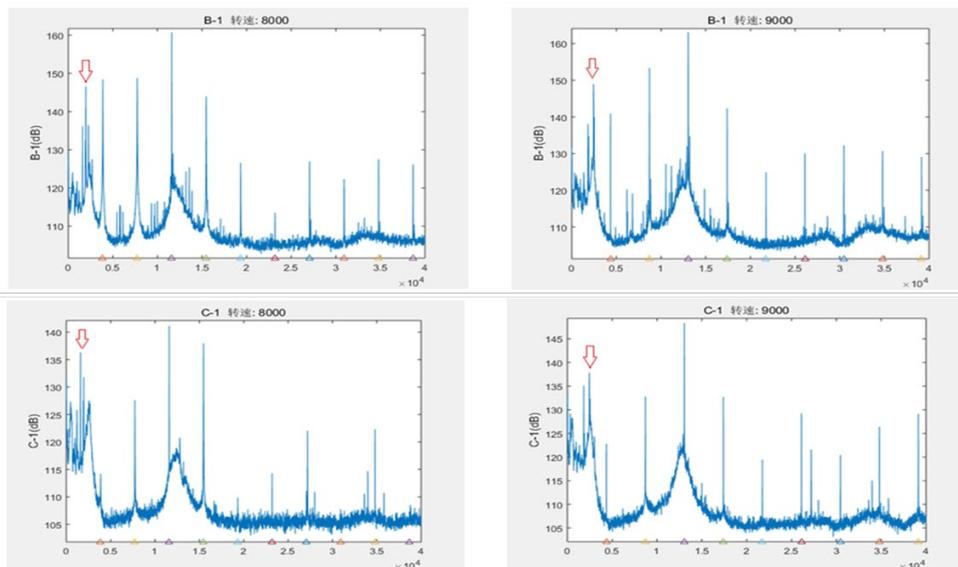


图 9 试验台测试对应的不稳定工况频谱

2 基于 CFD/CAA 技术的声传播计算

声学非齐次波动方程严格意义上讲是三维可压缩 Navier-Stokes (N-S) 方程的变形形式，可压缩形式的 N-S 方程能够描述在任何流动情况下声波的产生和传播现象。因此，从理论上讲，流声的数值计算可以通过直接求解 N-S 方程方法实现。这样从大尺度到最小的黏性尺度，全部的尺度都被解出，求解结果包括了声音的产生和传播。显然，这样的计算并不存在湍流模型和声源模型带来的模型误差和近似误差，而且直接模拟能够同时得到流场和声场的结果，有利于更好揭示噪声机理。然而与流场流动的能量相比，声波的能量要小几个数量级。因此，这种求解方式通常要求高阶、低耗散的方法用于精确捕捉和传播声波，同时从声源到噪声测点划分的网格也要足够精细。因此进行直接模拟对系统资源的要求很高，而且计算时间也很长，就工程应用而言，这种方法目前还是不实际的。

1952 年，Lighthill 创立了声类比理论，Lighthill 方程标志着气动声学学科的诞生。1969 年，Ffowcs Williams 和 Hawkins 将 Lighthill 声类比理论推广到适用于任意运动物体固体边界发声问题，建立了著名的 FW-H 方程，是气动声学学科又一里程碑式的工作。CFD 和声类比相结合的方法是迄今为止最可行的流致噪声计算方法，此方法也常被称为混合方法或两步法。

该方法的基本思想是：近场部分采用 CFD 技术进行数值模拟，以获得准确的声源信息数据；声波从近场到远场部分的传播采用声类比方法进行精确的求解。流程框图如图 22 所示。

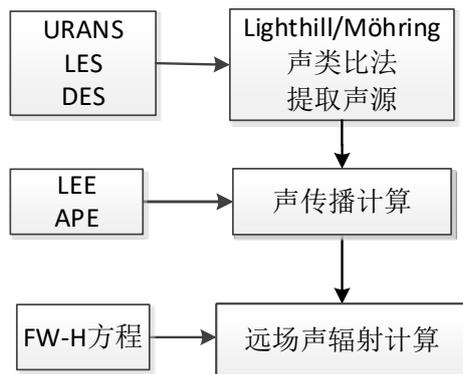


图 10 CFD 和声类比相结合实现流致噪声计算

因此，对于该试验台压气机声传播的计算：首先需要对图 23 框图试验段区域进行 CFD 流场仿真，获得准确的声源信息数据；然后再通过声类比法仿真进口管道声传播以及外场辐射。其基本理论及具体仿真过程将在本章节介绍。

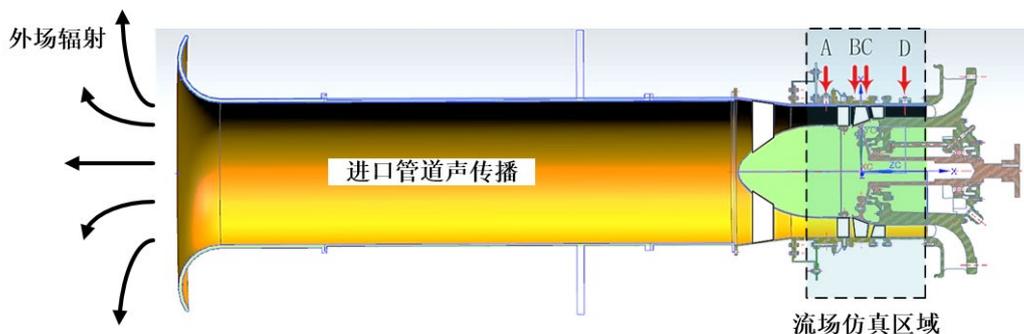


图 11 压气机试验台声传播仿真示意图

2.1 Lighthill 声类比理论

气动声学方程可以从流体力学的质量方程和动量守恒方程推导出来。应用和式约定，在笛卡尔坐标系下微分形式的质量守恒方程可表示为

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_i}{\partial x_i} = 0 \tag{1}$$

式中， ρ 是流体的密度， v_i 是流体速度矢量的 i 向分量。对应的动量守恒方程可表示为

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho v_j \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \tag{2}$$

式中， p 是流体的压力， τ_{ij} 是流体中的黏性应力张量。

Lighthill (1952) 针对在均匀静止流体介质包围的小尺度范围内湍流产生的气动噪声问题，推导出了一个描述声波产生的非奇次波动方程，其推导过程如下：

首先，用 v_i 乘以连续方程(1)并与动量方程(2)相加，可得

$$\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho v_i v_j + \delta_{ij} p - \tau_{ij}) \quad (3)$$

取方程(3)的散度, 得

$$\frac{\partial^2 \rho v_i}{\partial x_i \partial t} = - \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (\rho v_i v_j + \delta_{ij} p - \tau_{ij}) \quad (4)$$

并对连续方程(1)取时间的导数, 即

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \rho v_i}{\partial x_i \partial t} = 0 \quad (5)$$

方程(4)与方程(5)相减, 可以得到

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 p}{\partial^2 x_i} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (\rho v_i v_j - \tau_{ij}) \quad (6)$$

为了获得有关压力的波动方程, 在方程(6)两边各加 $\frac{\partial^2 p}{c_0^2 \partial^2 x_i} - \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_i^2}$, 这样就得

$$\frac{1}{c_0} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 p'}{\partial^2 x_i} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (\rho v_i v_j - \tau_{ij}) + \frac{1}{c_0} \frac{\partial^2}{\partial^2 x_i} (p' - c_0^2 \rho') \quad (7)$$

类似的, 在方程(6)两边各加 $\frac{\partial^2 p'}{c_0^2 \partial^2 x_i} - \frac{\partial^2 \rho'}{\partial x_i^2}$, 则得到关于密度的波动方程

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 \rho'}{\partial^2 x_i} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (\rho v_i v_j - \tau_{ij}) + \frac{\partial^2}{\partial^2 x_i} (p' - c_0^2 \rho') \quad (8)$$

通常将方程(8)右边项以 T_{ij} 简写成如下形式:

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} - \frac{1}{c_0} \frac{\partial^2 \rho'}{\partial^2 x_i} = \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial x_i \partial x_j} \quad (9)$$

式中, T_{ij} 就是 Lighthill 应力张量, 即

$$T_{ij} = \rho v_i v_j - \tau_{ij} + (p' - c_0^2 \rho') \delta_{ij} \quad (10)$$

c_0 表示未受扰动流体的声速, p' 是流体中的压力脉动量, x_i 是空间固定坐标系, 在湍流流动区域外的平均流动速度为零。这就是著名的 Lighthill 方程, 它描述由方程右端的声源分部产生的声传播控制方程。为了计算声源产生的声辐射, 必须首先知道方程右端声源分布, 即要求与流动速度相关的量统统都放在方程的右侧作为声源; 要求观测点必须位于理想的声传播介质 (静止、均匀); 要求流场对流效应有限 ($Ma < 0.3$)。

2.2 静止固体边界 Curle 方程

Curle 首先将 Lighthill 气动声学理论推广到了考虑静止固体边界的影响, 被称为 Curle 声类比方法。

将方程(9)重新写成积分形式 (Stratton),

$$\rho' = \frac{1}{4\pi c_0^2} \int_{\Omega} \left[\frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial x_i \partial x_j} \frac{1}{r} \right] dV(\xi) + \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial n} \rho' + \frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial n} \rho' + \frac{1}{c_0 r} \frac{\partial r}{\partial n} \frac{\partial}{\partial t} \rho' \right] dS(\xi) \quad (11)$$

Γ 表示声学计算域的边界, $r = |x - y|$, $t' = t - r/c_0$.

从方程(11)出发, 右边利用两次格林格式来对方程积分, 得

$$\begin{aligned} \rho' &= \frac{1}{4\pi c_0^2} \int_{\Omega} \left[\frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial x_i \partial x_j} \frac{1}{r} \right] dV(\xi) + \frac{1}{4\pi c_0^2} \int_{\Gamma} \left[n_i \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial y_j} (T_{ij} + c_0 \rho' \delta_{ij}) \right] dS(\xi) \\ &+ \frac{1}{4\pi c_0^2} \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{\Gamma} \left[n_j \frac{1}{r} (T_{ij} + c_0 \rho' \delta_{ij}) \right] dS(\xi) \end{aligned} \quad (12)$$

将方程(10) T_{ij} 的表达式代入方程 (11),

$$\begin{aligned} \rho' &= \frac{1}{4\pi c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \int_{\Omega} \left[\frac{T_{ij}}{r} \right] dV(\xi) + \frac{1}{4\pi c_0^2} \int_{\Gamma} \left[n_i \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial y_j} (\rho v_i v_j + p' \delta_{ij} - \tau_{ij}) \right] dS(\xi) \\ &+ \frac{1}{4\pi c_0^2} \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{\Gamma} \left[n_j \frac{1}{r} (\rho v_i v_j + p' \delta_{ij} - \tau_{ij}) \right] dS(\xi) \end{aligned} \quad (13)$$

从动量守恒方程(2)有,

$$n_i \frac{\partial}{\partial y_j} (\rho v_i v_j + p' \delta_{ij} - \tau_{ij}) = -n_i \frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i) \quad (14)$$

当边界固定或是在各自平面振动, 有

$$v_n = v_i n_i = 0 \quad (15)$$

方程(13)最终可以简化为,

$$\begin{aligned} \rho' &= \frac{1}{4\pi c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \int_{\Omega} \left[\frac{T_{ij}(y, t - \frac{r}{c_0})}{r} \right] dV(\xi) + \frac{1}{4\pi c_0^2} \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{\Gamma} \left[\frac{P_i(y, t - \frac{r}{c_0})}{r} \right] dS(\xi) \\ P_i &= (p \delta_{ij} - \tau_{ij}) n_j \end{aligned} \quad (16)$$

其中, \mathbf{P} 为流体作用在固体表面的单位力。方程(16)被称为积分形式的 Lighthill 方程或 Curle's 声类比方程。从方程可以看出, 声场可以看成是四极子体声源和偶极子面声源共同作用的结果。而偶极子的强度和流体作用在固体表面的强度是相同的。

2.3 运动固体边界 FW-H 方程

将 Lighthill 声类比理论一般化为含有运动边界条件的 FW-H 方程, 本质为边界元方法。

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c_0^2 \nabla^2 \right) [H(f) (\rho - \rho_0)] = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (T_{ij} H(f)) - \frac{\partial}{\partial x_i} (F_i \delta(f)) + \frac{\partial}{\partial t} (Q_i \delta(f)) \quad (17)$$

2.3.1 积分求解 FW-H 方程

Ffowes Williams 和 Hawkings 应用广义 Creen 函数，将 Lighthill 和 Curle 的理论推广到了有任意运动固体边界存在的流动发生问题中，即物体在流体中运动的发声问题，得到著名的 FW-H 方程。推导过程省略。

$$\begin{aligned} \rho' = & \frac{1}{4\pi c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \int_{\Omega} \left[\frac{T_{ij}(y, t - \frac{r}{C})}{r|C|} \right] dV(\xi) + \frac{1}{4\pi c_0^2} \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{\Gamma} \left[\frac{P_i(y, t - \frac{r}{C})}{r|C|} \right] dS(\xi) \\ & + \frac{1}{4\pi c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \int_{\Omega} \left[\frac{\rho a_j}{r|C|} \right] dV(\xi) + \frac{1}{4\pi c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \int_{\Gamma} \left[\frac{\rho v_i v_j}{r|C|} \right] dS(\xi) \end{aligned} \quad (18)$$

$C \equiv 1 - \bar{r} / r \cdot \bar{M}$ 为多普勒因子；

方程(18)第一项对应由 Lighthill 理论所解得,相当于四极子声源, 而固壁面的直接影响由后面剩下的三项来说明。其中第二项表达由固壁作用在流体上的脉动力 f_i 所形成的声波, 称为载荷噪声。剩下两项表达由体积移位效应所产生的声波一起因于表面加速度的偶极子项和运动体积引起的厚度声源。

一般叶轮机械噪声在通常马赫数小于 0.7 的情况下, 可以看出等熵流动, 可以忽略四极子噪声和壁面粘性效应。因此, 仅需通过叶片表面的 CFD 数据积分获得叶片气动力, 同时为提高求解精度, 将叶片划分为紧致声源区 (声源尺度 L 小于四分之一波长)。最后, 推导得到单调音扇声源的近似表达式:

$$p_{nB} \sim \frac{iBk_{nB}}{4\pi} e^{ik_n Bx} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} e^{i(nB-p)(\varphi-\pi/2)} J_{nB-p}(k_{nB}R_0 \sin \theta) [\bar{F}_{T,p} \cos \theta - \frac{nB-p}{k_{nB}R_0} \bar{F}_{D,p}] \quad (19)$$

2.3.2 桨叶噪声求解步骤 (LMS)

LMS 中利用积分形式的 FW-H 方程对叶轮机械桨叶噪声分析步骤如下图 24:

1. 导入叶片表面的非定常 CFD 数据;
2. 计算叶片表面的非定常气动力, $\bar{F}_{T,p}$ (thrust) 和 $\bar{F}_{D,p}$ (drag);
3. 创建声源项 (确定旋转坐标系, 位置等);
4. 求解在 BPF 以及各个 Harmonic 位置的声学响应方程。
5. 后处理

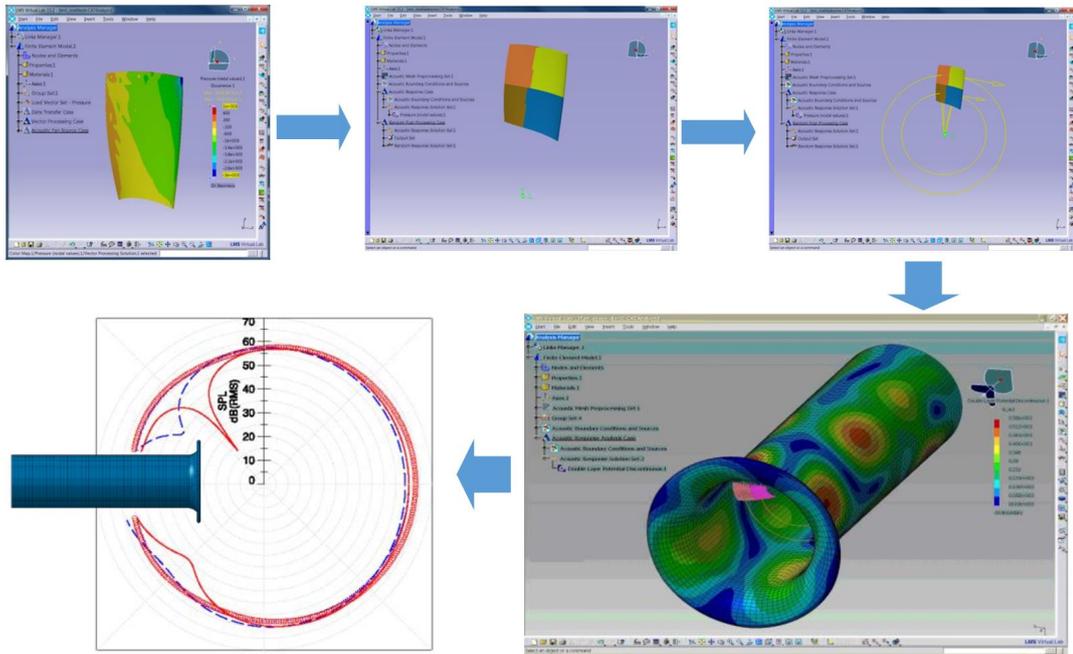


图 12 桨叶噪声分析步骤 (LMS)

2.3.3 运动坐标系 MRF 方法 (Actran)

对于转子，在固定坐标系中的体积积分和面积积分都是非定常的，因此将观测点的固定坐标系转换到随转子旋转的 Lagrangian 坐标系是非常值得研究的工作。经过这样的转换刚性螺旋桨的声源面积和声源体积将是固定不变的。

在应用叶轮机械转子声场时，仅仅需要导入 MRF 流场以运动坐标系下的定常数据，其计算效率要高于非定常 CFD 结果作为声源项的计算。但只包含转子流场区域 CFD 计算结果，因此在声场结果中只包含转子通过频率及其倍频成分。例如下图 25 所示，分析离心风机远场测点的噪声计算，对比利用滑移非定常网格非定常流场结果和 MRF 定常流场结果输入作为声源项的仿真结果，后者只有位于转子通过频率和其倍频的单点幅值结果，表征离散噪声。对于宽频噪声，需要利用固定坐标系下的流场输入。

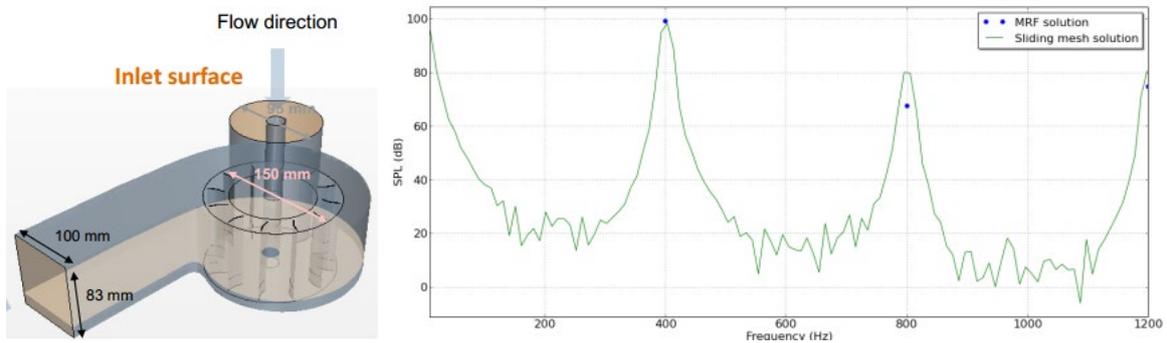


图 13 离心风机 MRF 方程计算结果参考

2.4 变分形式的 Lighthill 声类比

2.4.1 公式推导

相比 LMS 声学仿真软件，著名公司 MSC 旗下的 Actran 声学仿真软件应用有限元技术。首先对方程(9)基本方程进行傅里叶变换到频率域，

$$-w^2 \rho - c_0^2 \square \rho = \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial x_i \partial x_j} \tag{20}$$

然后对其进行有限元离散处理，

$$\int_V N_a [-w^2 \rho - c_0^2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_i^2}] dV = \int_V N_a \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial x_i \partial x_j} dV \tag{21}$$

并对各项积分，得

$$-w^2 \int_V N_a \rho dV - \int_V \frac{\partial}{\partial x_i} (N_a c_0^2 \frac{\partial \rho}{\partial x_i}) dV + \int_V \frac{\partial N_a}{\partial x_i} c_0^2 \frac{\partial \rho}{\partial x_i} dV = \int_V \frac{\partial}{\partial x_i} (N_a \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}) dV - \int_V \frac{\partial N_a}{\partial x_i} \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} dV \tag{22}$$

利用高斯公式，

$$\int_V \frac{\partial F_i}{\partial x_i} dV = \int_S F_i n_i dS \tag{23}$$

得到最终离散形式：

$$w^2 \int_V N_a \rho dV - \int_V \frac{\partial N_a}{\partial x_i} c_0^2 \frac{\partial \rho}{\partial x_i} dV = iw \int_S N_a \rho v_i n_i dS + \int_V \frac{\partial N_a}{\partial x_i} \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} dV \tag{24}$$

其中，右式第一项为面声源项，第二项为体声源项。

2.4.2 流致噪声求解步骤 (Actran)

Actran 中利用变分形式的 Lighthill 声类比方法对叶轮机流致噪声分析步骤如下图 26:

1. 建立 CFD 分析模型，提取非定常流场；
2. 建立声学分析模型；
3. 将 CFD 基本量利用声类比方法转化为流致噪声源，并使用积分法插值到声学网格；
4. 对声源进行傅里叶变换，将时域信号转换到频域型号；
5. 计算风扇一起的流致噪声传播。

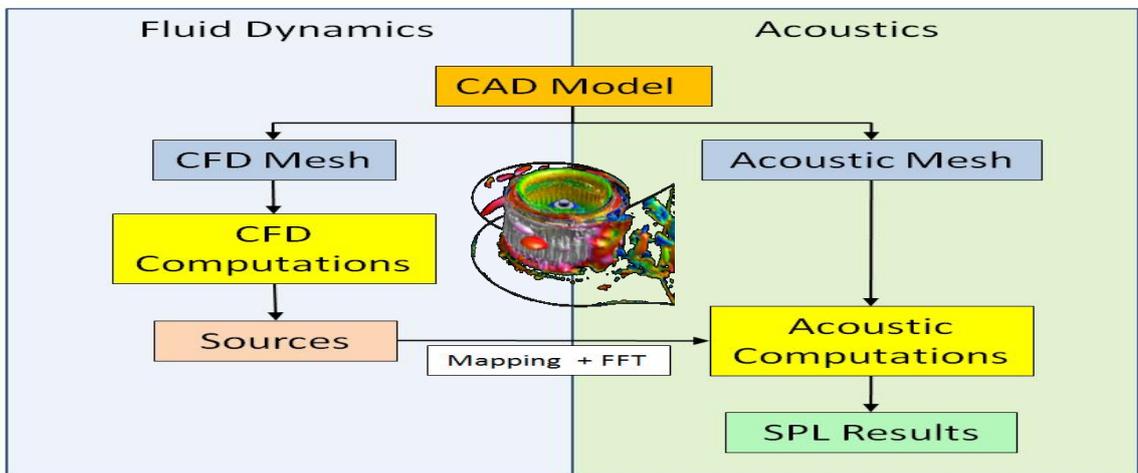


图 14 流致噪声求解步骤 (Actran)

3 流场仿真实论介绍

3.1 欧拉方程

在笛卡尔坐标系下的欧拉方程一般表达形式为:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} U d\Omega + \int_S \bar{F}_I \cdot d\bar{S} = \int_{\Omega} S_T d\Omega \quad (25)$$

其中 Ω 是体积, S 是表面积。 U 是保守变量的向量:

$$U = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho v_1 \\ \rho v_2 \\ \rho v_3 \\ \rho E \end{bmatrix} \quad (26)$$

\bar{F}_I 是无粘通量矢量:

$$\bar{F}_I = \begin{bmatrix} \rho v_i \\ \rho v_1 v_i + p \delta_{1i} \\ \rho v_2 v_i + p \delta_{2i} \\ \rho v_3 v_i + p \delta_{3i} \\ (\rho E + p) v_i \end{bmatrix} \quad (27)$$

总能量定义如下:

$$E = e + \frac{1}{2} v_i v_i \quad (28)$$

S_T 包含源项:

$$S_T = \begin{bmatrix} 0 \\ \rho f_{e1} \\ \rho f_{e2} \\ \rho f_{e3} \\ W_f \end{bmatrix} \quad (29)$$

其中, f_{e1} , f_{e2} , f_{e3} 分别为外力 \bar{f}_e 的三个分量。 W_f 表示为外力单位时间内所作的功:

$$W_f = \rho \bar{f}_e \cdot \bar{v} \quad (30)$$

3.2 Navier-Stokes (N-S) 方程

3.2.1 N-S 方程一般形式

相对欧拉方程(25), N-S 增加了粘性项 \bar{F}_V 的作用, 用笛卡尔框架写成的 N-S 方程一般形式可表示为:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} U d\Omega + \int_S \bar{F}_I \cdot d\bar{S} + \int_S \bar{F}_V \cdot d\bar{S} = \int_{\Omega} S_T d\Omega \quad (31)$$

其中, \bar{F}_V 为有粘通量矢量:

$$-\bar{F}_V = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{i1} \\ \tau_{i2} \\ \tau_{i3} \\ q_i + v_j \tau_{ij} \end{bmatrix} \quad (32)$$

$$q_i = \kappa \frac{\partial T}{\partial x_i} \quad (33)$$

其中, q_i 为热通量分量, κ 为层流导热系数。

为了封闭 N-S 方程, 有必要确定本构关系以及其他变量中剪切应力张量的定义。这里只考虑牛顿流体的剪应力张量由下式给出:

$$\tau_{ij} = \mu \left[\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) - \frac{2}{3} (\bar{\nabla} \cdot \bar{v}) \delta_{ij} \right] \quad (34)$$

其中, μ 为分子动粘性系数。

3.2.2 时均 N-S 方程

原则上, N-S 方程可描述层流和湍流。然而, 湍流是一个非线性过程, 具有广泛的空间和时间尺度。在大多数工程应用中对复杂湍流的直接模拟是不可能的。

对复杂的叶轮机械系统, 最直接的方法是将流场划分为平均值和波动部分。这个过程将产生雷诺平均 N-S (RANS) 方程。

雷诺平均方程是通过平均时间间隔 T 上的粘性守恒定律得出的, 相对于湍流波动的时间尺度来说足够大, 但对于所有其他时间相关效应而言足够小。时间平均如下进行:

N-S 方程中的所有变量 A 都可以拆分成两部分:

$$A = \bar{A} + A' \quad (35)$$

$$\bar{A}(\bar{x}, t) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} A(\bar{x}, t + \tau) d\tau \quad (36)$$

其中, \bar{A} 是时间平均量, A' 是波动小量。则有:

$$\bar{A}' = 0 \quad (37)$$

相应的密度加权平均值可通过以下定义:

$$\tilde{A} = \frac{\overline{\rho A}}{\bar{\rho}} \quad (38)$$

其中,

$$A = \tilde{A} + A'' \quad (39)$$

$$\overline{\rho A''} = 0 \quad (40)$$

在方程中，密度和压力是时间平均的，而能量、速度分量和温度则为密度加权平均时间。

N-S 方程的平均形式与一般的 N-S 方程相同，其中 U ， \bar{F}_l ， \bar{F}_v 的表达形式分别由方程(26)，(27)，(32)给出：

$$U = \begin{bmatrix} \bar{\rho} \\ \bar{\rho}\tilde{v}_1 \\ \bar{\rho}\tilde{v}_2 \\ \bar{\rho}\tilde{v}_3 \\ \bar{\rho}\tilde{E} \end{bmatrix} \quad \bar{F}_l = \begin{bmatrix} \bar{\rho}\tilde{v}_i \\ \bar{\rho}\tilde{v}_1\tilde{v}_i + \overline{\rho v_1''v_i''} + \bar{p}\delta_{1i} \\ \bar{\rho}\tilde{v}_2\tilde{v}_i + \overline{\rho v_2''v_i''} + \bar{p}\delta_{2i} \\ \bar{\rho}\tilde{v}_3\tilde{v}_i + \overline{\rho v_3''v_i''} + \bar{p}\delta_{3i} \\ (\bar{\rho}\tilde{E} + \bar{p})\tilde{v}_i + \overline{\rho E''v_i''} + \overline{pv_i''} \end{bmatrix} \quad -\bar{F}_v = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{\tau}_{11} \\ \bar{\tau}_{12} \\ \bar{\tau}_{13} \\ \bar{q}_i + \tilde{v}_i\bar{\tau}_{ij} \end{bmatrix} \quad (41)$$

密度平均总能量由下式给出：

$$\tilde{E} = \tilde{e} + \frac{1}{2}\tilde{v}_i\tilde{v}_i + \tilde{\kappa} \quad (42)$$

κ 是湍动能，定义为：

$$\kappa = \frac{1}{2}\overline{(\rho v_i''v_i''/\rho)} \quad (43)$$

3.3 RANS 方程中的湍流处理

雷诺平均 N-S 方程导致了雷诺应力张量和湍流热扩散项的引入。由于这些量是未知的，基于与不可避免的经验信息相关的理论考虑，应用 N-S 方程来计算湍流需要引入这些未知关系的一些模型。

对于线性涡动粘性湍流模型，基于 Boussinesq 假设的一阶封闭模型表示雷诺应力：

$$-\overline{\rho v_i''v_j''} = \mu_t \left[\frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{v}_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}(\bar{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{v}})\delta_{ij} \right] - \frac{2}{3}\bar{\rho}\kappa\delta_{ij} \quad (44)$$

其中， μ_t 为涡粘系数。

对于湍流热扩散项，使用梯度近似：

$$C_p \overline{\rho v_i''T} = -\kappa_t \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_i} \quad (45)$$

其中， κ_t 湍流热传递系数，该系数通过普朗特数 Pr_t 与涡粘系数 μ_t 关联。

最后，由上述假设得到的控制方程组与一般的 N-S 方程相同的形式：

$$U = \begin{bmatrix} \bar{\rho} \\ \bar{\rho}\tilde{v}_1 \\ \bar{\rho}\tilde{v}_2 \\ \bar{\rho}\tilde{v}_3 \\ \bar{\rho}\tilde{E} \end{bmatrix} \quad \bar{F}_l = \begin{bmatrix} \bar{\rho}\tilde{v}_i \\ \bar{\rho}\tilde{v}_1\tilde{v}_i + \bar{p}^*\delta_{1i} \\ \bar{\rho}\tilde{v}_2\tilde{v}_i + \bar{p}^*\delta_{2i} \\ \bar{\rho}\tilde{v}_3\tilde{v}_i + \bar{p}^*\delta_{3i} \\ (\bar{\rho}\tilde{E} + \bar{p}^*)\tilde{v}_i \end{bmatrix} \quad -\bar{F}_v = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{\tau}_{11} \\ \bar{\tau}_{12} \\ \bar{\tau}_{13} \\ \bar{q}_i + \tilde{v}_i\bar{\tau}_{ij} \end{bmatrix} \quad (46)$$

其中雷诺应力和热通量分量由下式给出：

$$\bar{\tau}_{ij} = (\mu + \mu_t) \left[\frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{v}_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} (\bar{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{v}}) \delta_{ij} \right] \quad (47)$$

$$\bar{q}_i = (\bar{\kappa} + \kappa_t) \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_i} \quad (48)$$

其中， μ_t 和 κ_t 需要通过建立相应的湍流模型求解。

与层流情况相反，静压和总能量都包含湍动能 κ 的贡献，定义为：

$$\bar{p}^* = \bar{p} + \frac{2}{3} \bar{\rho} \bar{\kappa} \quad (49)$$

$$\bar{E} = \bar{e} + \frac{1}{2} \tilde{v}_i \tilde{v}_i + \bar{\kappa} \quad (50)$$

3.4 旋转坐标系变换

在诸如涡轮机械问题的许多应用中，有必要描述相对坐标下的流动行为并且求解相对速度分量的控制方程。

在旋转坐标系中相对速度的 Reynolds 平均 N-S 方程变为：

$$U = \begin{bmatrix} \bar{\rho} \\ \bar{\rho} \tilde{w}_1 \\ \bar{\rho} \tilde{w}_2 \\ \bar{\rho} \tilde{w}_3 \\ \bar{\rho} \bar{E} \end{bmatrix} \quad \bar{F}_I = \begin{bmatrix} \bar{\rho} \tilde{w}_i \\ \bar{\rho} \tilde{w}_1 \tilde{w}_i + \bar{p}^* \delta_{1i} \\ \bar{\rho} \tilde{w}_2 \tilde{w}_i + \bar{p}^* \delta_{2i} \\ \bar{\rho} \tilde{w}_3 \tilde{w}_i + \bar{p}^* \delta_{3i} \\ (\bar{\rho} \bar{E} + \bar{p}^*) \tilde{w}_i \end{bmatrix} \quad -\bar{F}_V = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{\tau}_{r1} \\ \bar{\tau}_{r2} \\ \bar{\tau}_{r3} \\ \bar{q}_i + \tilde{w}_i \bar{\tau}_{ij} \end{bmatrix} \quad (51)$$

其中， \tilde{w}_i 是 $\tilde{\mathbf{w}}$ 的相对速度 x_i 方向上的分量。源项 S_T 包含科式力和离心力的贡献：

$$S_T = \begin{bmatrix} 0 \\ (-\bar{\rho}) [2\tilde{\mathbf{w}} \times \tilde{\mathbf{w}} + (\tilde{\mathbf{w}} \times (\tilde{\mathbf{w}} \times \tilde{\mathbf{r}}))] \\ \bar{\rho} \tilde{\mathbf{w}} \cdot \bar{\nabla} (0.5 w^2 r^2) \end{bmatrix} \quad (52)$$

其中 w 是相对坐标系下的角速度。

应力和热通量分量由下式给出：

$$\bar{\tau}_{ij} = (\bar{\mu} + \mu_t) \left[\frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{v}_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} (\bar{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{v}}) \delta_{ij} \right] \quad (53)$$

$$\bar{q}_i = (\bar{\kappa} + \kappa_t) \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_i} \quad (54)$$

静态压力和总能量定义为：

$$\bar{p}^* = \bar{p} + \frac{2}{3} \bar{\rho} \bar{\kappa} \quad (55)$$

$$\bar{E} = \bar{e} + \frac{1}{2} \tilde{w}_i \tilde{w}_i + \bar{\kappa} \quad (56)$$

1.5 绝对坐标系变换

尽管通常在相对坐标系下制定旋转系统的控制方程并针对相对速度分量求解，其保留用于船舶螺旋桨应用，通风机或风力涡轮机通常用绝对速度分量的相对参照系中表示。该公式与通常用于解决内部涡轮机械问题的公式不同，其中公式用于求解相对速度。这两种方法应具有相同的流动解决方案。然而，经验表明，解决方案可能会有所不同，特别是针对远场传播。对于螺旋桨问题，基于相对速度的公式具有远场相对速度可以达到极值的缺点。这导致过量的人工耗散导致远场区域中的非物理旋转流动，这种耗散是计算造成的。

因此，有必要去推导雷诺平均的 N-S 方程在旋转坐标系中的绝对速度为：

$$U = \begin{bmatrix} \bar{\rho} \\ \bar{\rho}\tilde{v}_1 \\ \bar{\rho}\tilde{v}_2 \\ \bar{\rho}\tilde{v}_3 \\ \bar{\rho}\tilde{E} \end{bmatrix} \quad \bar{F}_l = \begin{bmatrix} \bar{\rho}\tilde{w}_i \\ \bar{\rho}\tilde{w}_1\tilde{v}_i + \bar{p}^*\delta_{1i} \\ \bar{\rho}\tilde{w}_2\tilde{v}_i + \bar{p}^*\delta_{2i} \\ \bar{\rho}\tilde{w}_3\tilde{v}_i + \bar{p}^*\delta_{3i} \\ \bar{\rho}\tilde{E}\tilde{v}_i + \bar{p}^*\tilde{v}_i \end{bmatrix} \quad -\bar{F}_v = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{\tau}_{i1} \\ \bar{\tau}_{i2} \\ \bar{\tau}_{i3} \\ q_i + \tilde{v}_i\bar{\tau}_{ij} \end{bmatrix} \quad (57)$$

其中， \tilde{w}_i 是相对速度 \tilde{w} 在 x_i 方向上的分量。 v_i 是绝对速度 \tilde{v} 在 x_i 方向上的分量。这个方程同时包含绝对速度和相对速度。

源项 S_r 为：

$$S_r = \begin{bmatrix} 0 \\ -\bar{\rho}(\tilde{w} \times \tilde{v}) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (58)$$

应力和热通量分量同样由上式(53)和(54)给出：

静态压力由式(55)给出，总能量由绝对坐标系定义为：

$$\tilde{E} = \tilde{e} + \frac{1}{2}\tilde{v}_i\tilde{v}_i + \tilde{\kappa} \quad (59)$$

3.5 湍流模型

N-S 方程因为为有湍流粘性系数出现而导致了控制方程不封闭，因此需要对湍流粘性系数进行处理，最常用的解决办法就是建立湍流模型，即湍流粘性系数与时均流动参数关联起来的关系式。随着计算机的发展，湍流模型的研究得到了长足的发展，图 27 列出了近年来发展形成的各种湍流模型。

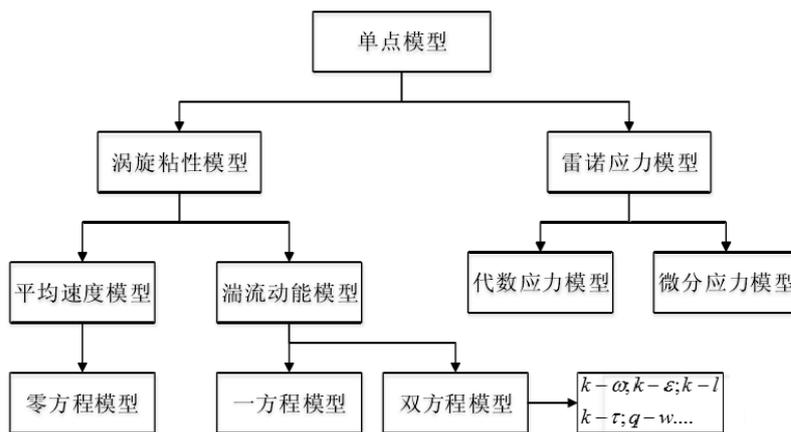


图 15 湍流模型树

从图 27 中的湍流模型树可以看到，对于时均的 N-S 方程组，湍流模型可以分为雷诺应力模型和涡旋粘性模型两种。涡旋粘性模型是基于 Bossinesq 假设，而 Bossinesqji 假设是指将流体质点作湍流脉动引起动量交换的机理与其他分子动力引起粘性切应力的机理相类比。

Bossinesq 假设：

$$(\tau_t)_{12} = -\rho \overline{u_1 u_2} = \mu_t \frac{\partial \overline{u_1}}{\partial x_2} = \rho \varepsilon_m \frac{\partial \overline{u_1}}{\partial x_2} \tag{60}$$

涡旋模型可以分为两种，一种是平均速度模型，又被称为零方程模型，另外一种为湍流动能模型，它又包含一方程模型和双方程模型。本仿真采用一方程-S-A 模型，下面对该模型进行详细介绍。

湍流粘性定义：
$$\mu_t = \tilde{\nu} f_{\nu 1} \tag{61}$$

式中： $\tilde{\nu}$ 为湍流作用变量。

而 $f_{\nu 1}$ 的表达式为：
$$f_{\nu 1} = \frac{\chi^3}{\chi^3 + c_{\nu 1}} \tag{62}$$

式中 χ 的表达式为：
$$\chi = \frac{\tilde{\nu}}{\mu} \tag{63}$$

其中 $\tilde{\nu}$ 遵循输运方程：

$$\frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \tilde{\nu} = \frac{1}{\sigma} \{ \nabla \cdot [(\mu + (1 + c_{b2}) \tilde{\nu}) \nabla \tilde{\nu}] - c_{b2} \tilde{\nu} \Delta \tilde{\nu} \} + Q \tag{64}$$

其中 Q 由生成项和耗散项组成：

$$Q = \tilde{\nu} P(\tilde{\nu}) - \tilde{\nu} D(\tilde{\nu}) \tag{65}$$

其中
$$\tilde{\nu} P(\tilde{\nu}) = c_{b1} \tilde{S} \tilde{\nu} \tag{66}$$

$$\tilde{\nu} D(\tilde{\nu}) = c_{w1} f_w \left(\frac{\tilde{\nu}}{d} \right)^2 \tag{67}$$

生成项目的变量定义为:

$$\tilde{S} = S f_{v3} + \frac{\tilde{v}}{k^2 d^2} f_{v2} \quad (68)$$

$$f_{v2} = \frac{1}{(1 + \chi / c_{v2})^3} \quad (69)$$

$$f_{v3} = \frac{(1 + \chi f_{v1}) (1 - f_{v2})}{\chi} \quad (70)$$

式中:

d—网格点到壁面的距离;

s—涡量。

在耗散项中, 函数 fw 为:

$$f_w = g \left(\frac{1 + c_{w3}^6}{g^6 + c_{w3}^6} \right)^{1/6} \quad (71)$$

$$g = r + c_{w2} (r^6 - r) \quad (72)$$

$$r = \frac{\tilde{v}}{\tilde{S} k^2 d^2} \quad (73)$$

其中常数: $c_{w1} = c_{b1} / k^2 + (1 + c_{b2}) / \sigma$, $c_{w2} = 0.3$, $c_{w3} = 2$, $c_{v1} = 7.1$, $c_{v2} = 5$, $c_{b1} = 0.1355$,

$c_{b2} = 0.622$, $k = 0.41$, $\sigma = 2/3$ 。

3.6 DTS 方法

DTS 方法 (双时间步法) 首先由 Jameson 提出。该方法在每个时间步 t, 引入虚拟时间步 τ , 对 RANS 方程进行收敛计算。

N-S 方程可以写成

$$\frac{\partial U}{\partial t} = R(U) \quad (74)$$

U 代表通量矩阵, $\partial U / \partial t$ 是时间导数项, $R(U)$ 是 N-S 方程中除时间导数项之外的其他项。

引入虚拟时间步 τ

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = \frac{\partial U}{\partial t} - R(U) \quad (75)$$

当上式收敛时, 有

$$\frac{\partial U}{\partial t} = 0 \quad (76)$$

$$R(U) = 0 \quad (77)$$

因此可以得到下一时间步的 U 。

DTS 有很多优点. 首先是无条件稳定, 这意味着可以根据需求把时间步设置的很大, 而不用担心收敛的问题。其次是由于非定常问题转换成为了定常的问题, 很多适用于定常的加速收敛方法也可以应用, 比如当地时间步法和多重网格技术。

在对压气机实验台流场进行仿真计算过程当中, 一般采用单通道流域, 采用周期性边界条件。但对于一些非定常现象, 例如失速, 其周期性逆转速旋转现象和对声场特征的贡献特征都无法判断。因此, 有必要采用全流道的 DTS 方法对其进行对比研究。为获得精度相对较高的结果, 必须对其网格划分的无关性进行验证, 选择合适的湍流模型和高精度的格式。同时, 这样也会使得计算的时间大大增加, 造成一定的计算压力。

3.7 NLH 方法

NLH 方法基于以下假设: 非定常流动是由定常量和扰动分量的叠加, 其中扰动分量为谐波形式

$$U(r, t) = \bar{U}(r) + \sum U'(r, t) \quad (78)$$

$$U'(r, t) = \sum_{k=1}^N \bar{U}_k(r) \exp(i\omega_k t) + \bar{U}_{-k}(r) \exp(i\omega_k t) - k^t \quad (79)$$

k 是谐波阶数

守恒形式非定常 NS 方程可以写成

$$\Omega_i \frac{dU}{dt_i} = -\sum_{\Delta s} F_c + \sum_{\Delta s} F_v + \Omega_i Q_i \quad (80)$$

以上时均形式为

$$\Omega_i \frac{d\bar{U}}{dt_i} = -\sum_{\Delta s} \bar{F}_c + \sum_{\Delta s} \bar{F}_v + \Omega_i \bar{Q}_i \quad (81)$$

用带谐波扰动项的输运方程去封闭 NS 方程

$$\Omega_i \frac{d\tilde{U}}{dt_i} = -\sum_{\Delta s} \tilde{F}_c + \sum_{\Delta s} \tilde{F}_v + \Omega_i \tilde{Q}_i \quad (82)$$

此方程成为线性化方程, 其在频域的方程为

$$i\omega_k \Omega_k \tilde{U}_k = -\sum_{\Delta s} \tilde{F}_c + \sum_{\Delta s} \tilde{F}_v + \Omega_i \tilde{Q}_i \quad (83)$$

即 NLH 方法解一组定常 NS 方程及一组定常的输运方程。

NLH 方法只需要使用单流道的网格即可模拟出全流道的非定常效应, 大大减小了计算量。但是由于 NLH 对扰动量进行了 k 阶谐波形式的简化, 其计算精确程度还有待验证。